| Wissen | Beispiel |
|---|---|

## Themenbereich 1: Proportionalitätszuordnungen

### Proportionale Zuordnungen

Wenn eine Größe verdoppelt wird, führt dies zur Verdoppelung der Anderen

Die Zuordnungsvorschrift lautet:

$x \mapsto q \cdot x$

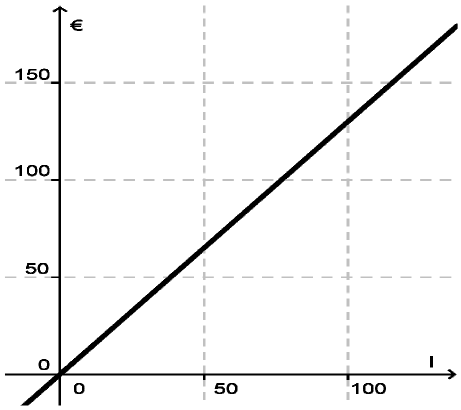
Proportionalitätsfaktor: q= $\frac{y}{x}$ bzw.

Alle Punkte der proportionalen Zuordnung bilden eine Ursprungsgerade

Benzinmenge in Abhängigkeit von dem Preis:

| Benzinmenge | Preis |
|---|---|
| 60 l | 78 € |
| :2 | :2 |
| 30 l | 39 € |
| ·3 | ·3 |
| 90 l | 117 € |

Quotient des Literpreises q = 1,30 $\frac{€}{l}$




### Umgekehrt proportionale Zuordnungen

Wird eine Größe verdoppelt, so wird die andere halbiert.

Die Zuordnungsvorschrift lautet:

x$\mapsto$ $\frac{p}{x}$

Es ergibt sich ein konstanter Wert p= x · y

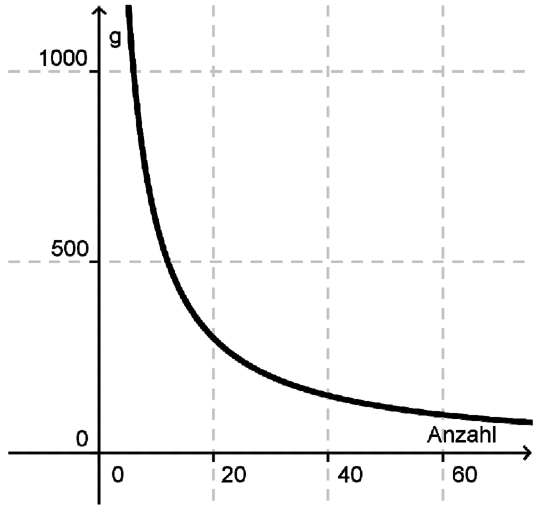
Nahrungsvorrat in Abhängigkeit von der Anzahl an Portionen:

| Vorrat | Anzahl an Portionen |
|---|---|
| 300 g | 20 |
| :3 | ·3 |
| 100 g | 60 |
| ·10 | :10 |
| 1000 g | 6 |

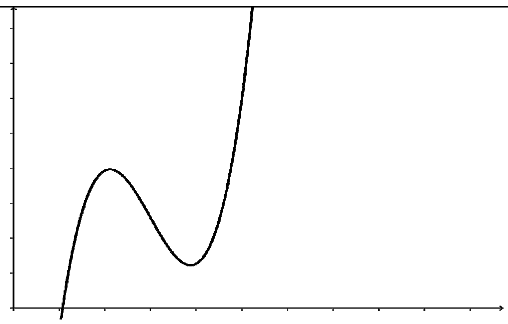
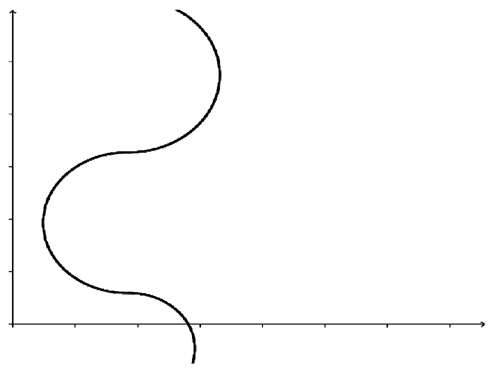
Produkt P = x · y = 6000 g

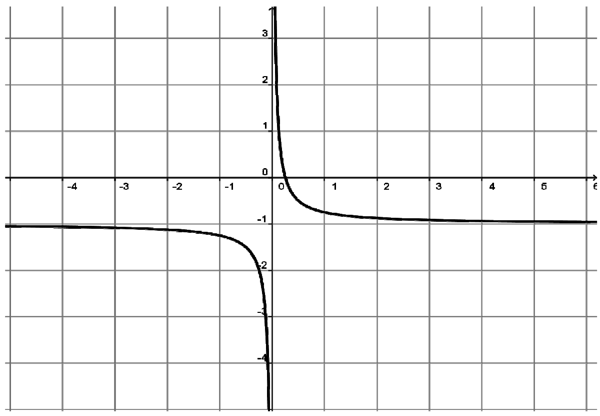
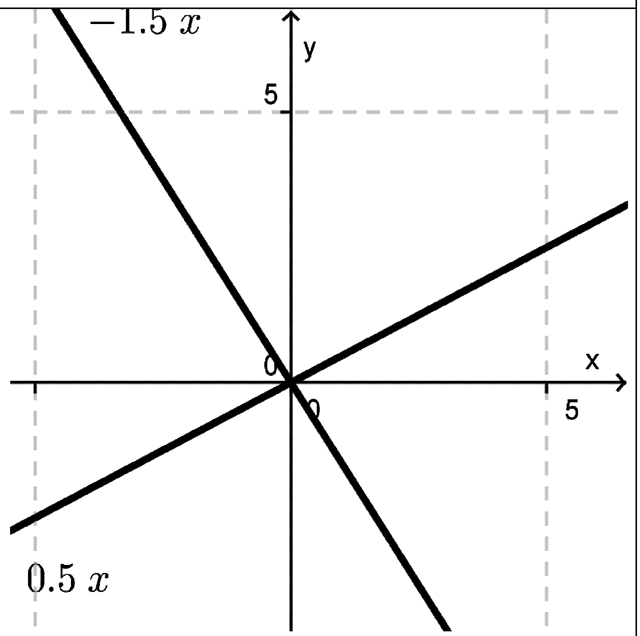
Zuordnungsvorschrift:

x$\rightarrow$ $\frac{6000g}{x}$

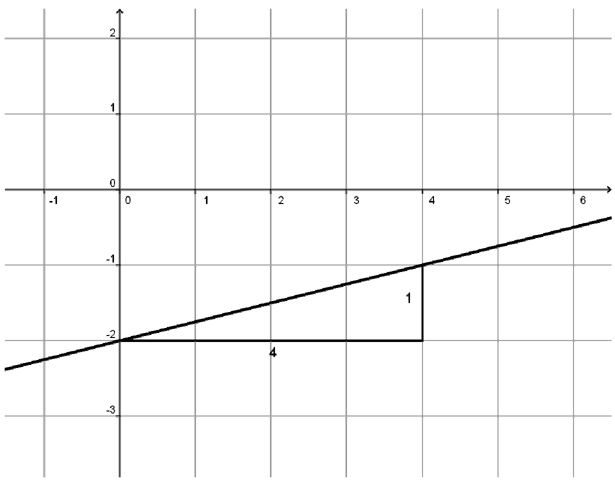
| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| Alle Punkte des Graphen $x \mapsto \frac{p}{x}$ liegen auf einer Hyperbel. |  |

## Themenbereich 2: Funktionen

| | |
|---|---|
| **Funktionsbegriff**<br><br>Die Zuordnung $x \mapsto y$ heißt Funktion.<br>Jeder x-Wert hat genau einen y-Wert.<br>Daraus folgt: f(x) = y | <br>Funktionsgraph<br><br><br>Kein Funktionsgraph |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| **Funktionen und Term**<br><br>$f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$<br>Alle Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden kann, bilden die Definitionsmenge $D_f$.<br><br>Ist keine Definitionsmenge angegeben, so ist die maximale Definitionsmenge gemeint.<br><br>Auf dem Graphen $G_f$ liegen alle Punkte P(x\|y), wenn x und y von P die Funktionsgleichung y = f(x) erfüllen. | <br>f(x) = $\frac{1}{4x}$ - 1 $D_f = Q \setminus \{0\}$<br><br>Wegen f(1) = $\frac{1}{4}$ -1 = - $\frac{3}{4}$<br><br>Gilt: P(1 \|-$\frac{3}{4}$) ∈ $G_f$ |
| **Nullstellen einer Funktion**<br><br>Nullstelle der Funktion f(x) sind Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse. Es kann dabei keine, eine oder mehrere geben. | f(x) = 2x + 4<br>Nullstelle: f(x) = 0<br>⇨ 2x +4 = 0<br>⇨ 2x = -4<br>⇨ x = -2<br>f(x) hat an der Stelle x = -2 eine Nullstelle. |
| **Proportionale Funktionen**<br><br>Die proportionale Funktion $f: x \mapsto m \cdot x$ hat eine konstante Steigung m und verläuft durch den Punkt P (1\|m) und den Ursprung. Dabei gibt der Faktor m die Steigung an. Der Graph steigt, wenn (m > 0) oder fällt für (m > 0). |  |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

| | |
|---|---|
| **Umfang und Flächeninhalt eines Kreises**<br><br>Kreise mit Radius r haben<br>den Umfang $U = 2\pi \cdot r$ und<br>den Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$<br><br>$\pi \approx 3{,}14$ ist dabei die Kreiszahl. | Für einen Kreis mit dem Durchmesser d= 3,4m und damit dem Radius r = 1,7m gilt:<br>Umfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$<br>$\approx 3{,}14 \cdot 3{,}4\ \text{m} \approx 10{,}7\ \text{m}$<br>Flächeninhalt : $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1{,}7\text{m})^2$<br>$\approx 3{,}14 \cdot 2{,}89\ \text{m}^2 \approx 9{,}1\ \text{m}^2$ |
| **Themenbereich 3: Lineare Funktionen** | |
| **Lineare Funktionen**<br><br>Eine Funktion ist dann linear,<br>wenn $f: x \mapsto m \cdot x + t$. Dabei gilt:<br>1. Die Funktion f(x) ist eine Gerade und schneidet die y-Achse im Punkt (0\|t).<br>2. Der Graph von f besitzt die Steigung m<br>3. Zur Berechnung von m braucht man zwei Punkte $P_1(x_1 \mid y_2)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$. Dabei gilt:<br>m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$<br>4. Der y-Achsenabschnitt ist der Punkt P(0\|y), an dem der Graph die y-Achse schneidet. | f: x→ $\frac{1}{4}$x – 2 ist linear<br> |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

| | |
|---|---|
| **Bestimmung des Funktionsterms für lineare Funktionen** | |
| Fall 1: Ein Punkt P($x_P$ \| $y_P$) und m sind bekannt.<br>1. Schritt: da f linear ist: f(x) = m x +t<br>2. Schritt: Lösen der Gleichung<br>f($x_P$) = m $x_P$ +t = $y_p$ nach t. | P(4\|5) liegt auf dem Graphen der linearen Funktion f mit der Steigung 2.<br>1. f(x) = 2x + t<br>2. f(4) = 2 · 4 + t = 5, => t = -3<br>Also: f(x) = 2x – 3 |
| Fall 2: Es sind zwei Punkte $P_1$( $x_1$\| $y_1$) und $P_2$( $x_2$ \|$y_2$) auf $G_f$ bekannt.<br>1. Schritt: da f linear ist: f(x) = m x +t .<br>2. Schritt: Es gilt m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.<br>3. Schritt: Lösen der Gleichung<br>f($x_1$)= m $x_1$ +t = $y_1$ nach t. | $P_1$(3\|4) und $P_2$(5\|1) liegen auf dem Graphen der linearen Funktion f.<br>1. f(x) = m x + t<br>2. m = $\frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$<br>3. f(3) = $-\frac{3}{2} \cdot 3 + t = 4$, => t = $\frac{17}{2}$<br>Also: f(x) = $-\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$ |
| Fall 3: Man kann durch einfaches Ablesen sowohl die Steigung m als auch t herauslesen. | |

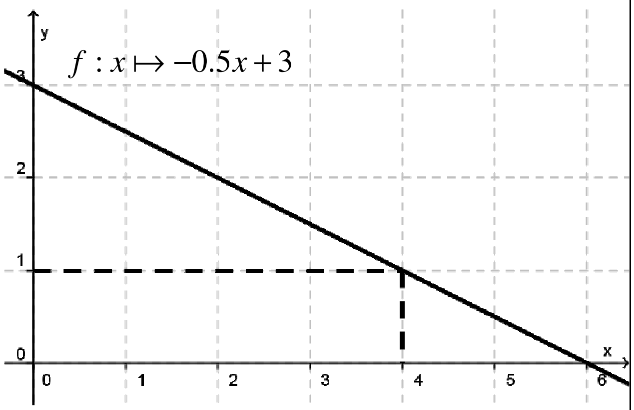
| Wissen | Beispiel |
|---|---|

## Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Die Gleichung mx +t = c kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch gelöst werden.
Zur rechnerischen Lösung sind Äquivalenzumformungen nötig.
Bei der zeichnerischen Lösung muss zunächst der Graph der linearen Funktion f:x$\rightarrow$ mx + t gezeichnet werden. Nun kann man anhand des Graphen ablesen, für welchen x-Wert man den vorgegebenen y-Wert erhält.

Die Nullstelle der Funktion erhält man durch Lösen der Gleichung mx +t = 0

$-\frac{1}{2}$ x +3 = 1 => x=4




6 ist Nullstelle der Funktion f.

## Lineare Ungleichungen

Ungleichungen sind genauso zu behandeln wie Gleichungen nur mit der Ausnahme, dass bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl auf beiden Seiten das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss.

Die Lösung einer Ungleichung kann sowohl als Menge als auch als Intervall angegeben werden.

$(2-x) \cdot 7 < -21$ | Vereinfachen
$14 - 7x < -21$ |-14
$-7x<-35$ |:(-7)
$x > 5$

L = {x | x > 5} = ]5;∞[

| Wissen | Beispiel |
| --- | --- |

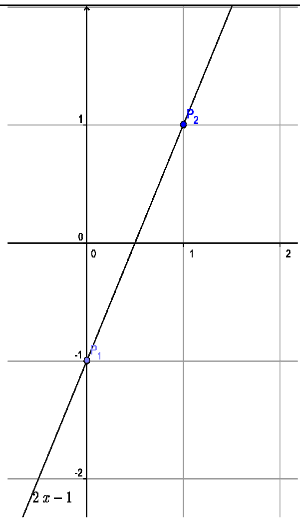
## Themenbereich 4: Gleichungen und Gleichungssysteme

### Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Für eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten gilt:

1. Die Lösung ist immer ein Zahlenpaar.
2. Es gibt unendliche viele Lösungen.
3. Alle möglichen Lösungen liegen auf einer Geraden.

Lösungen der Gleichung $4x - 2y = 2$ sind z.B. (1|1) und (0|-1). Sie liegen auf der Geraden $y = 2x - 1$




### Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei oder mehreren Gleichungen mit 2 Unbekannten:

(I) $3x + 7y = 10$

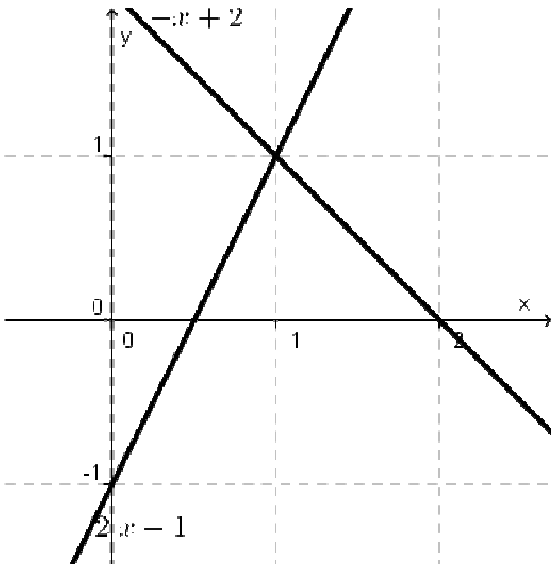
(II) $5x - y = 3$

Falls ein Zahlenpaar jede Bedingung des LGS erfüllt, so ist es die Lösung des Systems.

### Zeichnerisches Lösen eines LGS mit zwei Variablen

Ein LGS kann zeichnerisch gelöst werden, indem die beiden Geraden in ein Koordinatensystem eingetragen werde. Dabei entsteht ein Schnittpunkt, der beide Bedingungen erfüllt und somit als Lösung des LGS gilt.

Schnittpunkt: (1|1)



| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| **Zwei Rechenverfahren zum Lösen eines LGS** | |
| 1. Beim Einsetzverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst. Die erhaltende Bedingung wird anschließend in die zweite Gleichung eingesetzt und diese kann nun aufgelöst werden. Anschließend wird das Ergebnis wieder in die erste Bedingung eingesetzt und die zweite Variable berechnet. | Einsetzverfahren:<br>(I) y + 1 = 2 x<br>(II) 4 x + y = 7<br>(I) nach y auflösen: y= 2 x – 1<br>Und in (II) einsetzen: 4 x + 2 x – 1 = 7<br>Gleichung lösen: 6x = 8<br>x = 2 einsetzen: $x = \frac{3}{4}$<br>$y = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$ |
| 2. Beim Additionsverfahren werden die zwei Gleichungen so miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert, dass eine der beiden Variablen wegfällt. Hierfür muss oftmals durch Multiplizieren eine der beiden Gleichungen vorbereitet werden. Anschließend muss die Gleichung nach der verbliebenen Variable aufgelöst werden. Das erhaltene Ergebnis wird anschließend wieder in die Ausgangsgleichung eingesetzt und man erhält das Lösungspaar. | Additionsverfahren:<br>(I) 3 x - 4 y = 5<br>(II) x - 2 y = - 1 $\quad \mid \cdot(-3)$<br>(I) 3 x – 4 y = 5<br>(IIa) -3 x + 6 y = 3 $\quad$ \|(I) + (IIa)<br>2 y = 8 => y = 4<br>y = 4 in (II) einsetzen: x – 2 · 4 = -1 => x = 7 |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

## Lineare Gleichungssysteme in Anwendungssituationen

Folgende Schritte sollten beachtet werden:

1. Variablen einführen
2. Gleichungen aufstellen
3. Gleichungssystem lösen
4. Ergebnis überprüfen und Antwort formulieren

Aufgabe: Peter ist 6 Jahre älter als sein Bruder. Zusammen sind sie 30 Jahre alt. Wie alt ist Peter bzw. sein Bruder?

1. Peters Alter = x; Alter des Bruders = y
2. $x + y = 30$ (1)
   $x - 6 = y$ (2)
3. (2) in (1): $x + (x - 6) = 30$
   $2x = 36$
   $x = 18$
   ⇨ $y = 12$
4. $18 + 12 = 30$
   ⇨ Peter ist 18 Jahre alt und sein Bruder 12.

## Themenbereich 5: Laplace-Wahrscheinlichkeit

### Ergebnismenge (Ergebnisraum)

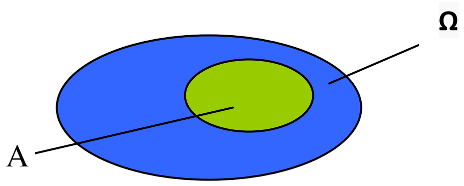
Ergebnismenge nennt man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Sie wird mit Ω bezeichnet. Das einzelne Ergebnis wird mit $\omega_1$, bzw. $\omega_2 \ldots$ bezeichnet.

Werfen eines Würfels :
$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Werfen einer Münze :
$\Omega = \{Kopf; Zahl\}$ oder $\Omega = \{0;1\}$

### Teilmenge

Wenn jedes Element des Ereignisses A in Ω vorhanden ist, ist A eine Teilmenge von Ω.
Man schreibt auch: $A \subset \Omega$



| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| **Ereignis**<br><br>Bei einem Zufallsexperiment ist jedes Ereignis A der Ergebnismenge Ω eine Teilmenge davon.<br>Wenn bei einer Durchführung des Zufallsexperiments ein Ergebnis aus A auftritt, ist das Ereignis A eingetreten. | Ergebnis A = „Augenzahl des Würfels gerade“<br>$\Rightarrow$ A={2;4;6} .<br>Das Ereignis A ist dann eingetreten, wenn 2, 4 oder 6 gewürfelt wird. |
| **Gegenereignis**<br><br>Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis $\overline{A}$, welches aus den Ergebnissen aus Ω besteht, die nicht zu A gehören.<br>Man schreibt auch: $\overline{A}$ = Ω \ A | Werfen eines Würfels :<br>$\Omega$ = {1;2;3;4;5;6}<br>$A$ ={2;4;6}<br>$\overline{A}$ ={1;3;5} |
| **Wahrscheinlichkeit**<br><br>Dem Ereignis A wird bei einem Zufallsexperiment eine Wahrscheinlichkeit P(A) zwischen Null und Eins zugeordnet.<br>Die relative Häufigkeit von A, die bei zunehmenden Wiederholungen des Experimentes auftritt, nähert sich dem Wert von P(A) an. | „Eine gerade Zahl beim Würfeln“:<br><br>P(„gerade Zahl“)= 0,5<br><br>P(„ungerade Zahl“)= 0,5 |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| **Laplace-Experimente**<br>Ein Laplace-Experiment tritt dann auf, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis bei einem Laplace-Experiment mit n-Ergebnissen beträgt $\frac{1}{n}$.<br><br>**Laplace-Wahrscheinlichkeit**<br><br>Um bei einem Laplace-Experiment an die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses zu kommen, muss man die Anzahl der für A zutreffenden Ergebnisse durch die Gesamtzahl der Ergebnisse dividieren.<br>P(A) = $\frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$<br>Man spricht auch die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω. | Werfen eines Würfels oder einer Münze<br><br>Würfel: Ω = {1;2;3;4;5;6}<br><br>Ereignis A = „Augenzahl gerade“<br>A = {2;4;6}<br>P(A) = $\frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{3}{6} = 0{,}5$ |
| **Zählprinzip**<br><br>Wird aus k verschiedenen Mengen mit $m_1$, $m_2$,..., $m_k$ Elementen gezogen, so gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_k$ verschiedene Möglichkeiten. | Beispiel: Eva hat vier Hosen, drei Pullover und zwei Paar Schuhe. Dann gibt es für sie 4 · 3 · 2 = 24 Möglichkeiten, sich verschieden zu kleiden.<br>Oft hilft hierbei auch ein Baumdiagramm. |

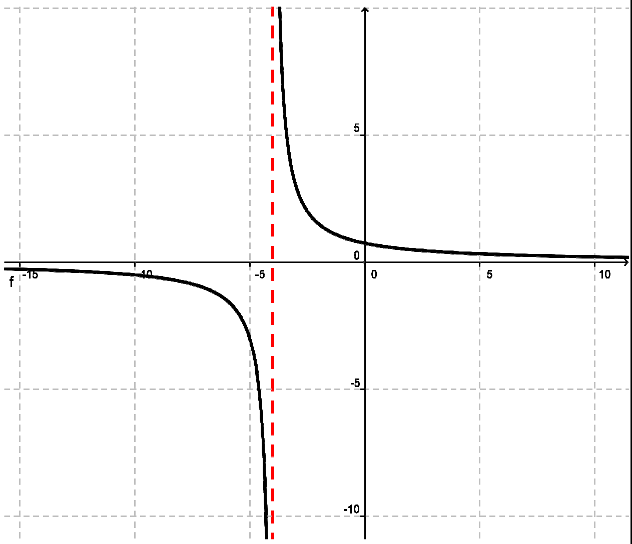
| Wissen | Beispiel |
|---|---|

## Themenbereich 6: Gebrochen rationale Funktionen

### Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen nennt man Funktionen wie f(x) $\rightarrow \dfrac{3}{x+4}$ , deren Funktionsterm ein Bruchterm ist. Die Definitionsmenge besteht aus allen Zahlen, für die der Nenner NICHT Null wird.

Asymptoten sind Geraden, denen sich ein Graph immer weiter annähert.
Es gibt dabei senkrechte und waagrechte Asymptoten.




f(x) $= \dfrac{3}{x+4}$ ;

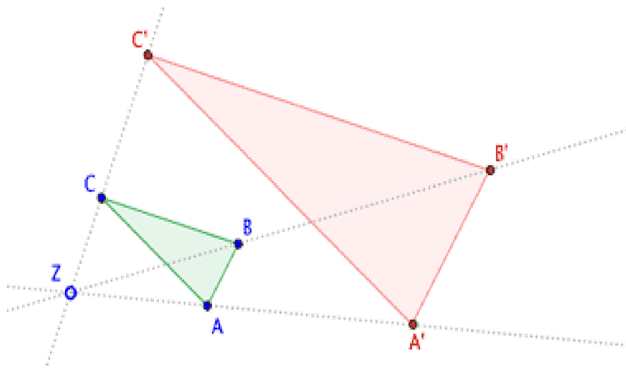
Um die senkrechte Asymptote zu finden, muss der Nenner = 0 gesetzt werden:

x + 4 = 0

- ⇨ x= - 4
- ⇨ Die Funktion f(x) hat bei - 4 eine senkrechte Asymptote

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

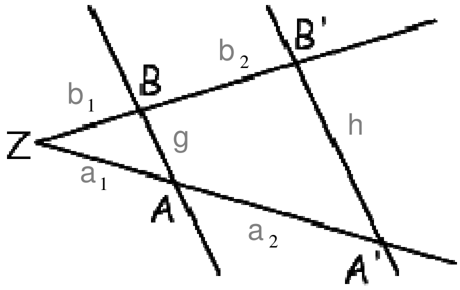
| | |
|---|---|
| **Rechnen mit Bruchtermen**<br><br>Wird ein Bruch gekürzt bzw. erweitert, so wird sowohl der Zähler als auch der Nenner mit der Zahl/Variablen multipliziert/dividiert. | $\frac{x^2+2x}{4+2x} = \frac{x(x+2)}{2(2+x)} = \frac{x}{2}$ |
| Bruchterme können nur dann addiert/subtrahiert werden, wenn bei allen Brüchen der Nenner gleich ist. Oftmals muss man deshalb sinnvoll erweitern, so dass die beiden Brüche addiert werden können. Der Nenner bleibt dabei erhalten, lediglich die Zähler werden addiert/subtrahiert. | $\frac{4}{x} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{4(x-1)}{x(x-1)} - \frac{(2x-3)x}{(x-1)x} = \frac{4x-4-(2x^2-3x)}{x(x-1)}$<br>$= \frac{-2x^2+7x-4}{x(x-1)}$ |
| Zum Multiplizieren von Bruchtermen muss Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert werden. | $\frac{3x}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{x^2} = \frac{3x(2x+1)}{(2x+1)x^2} = \frac{3}{x}$ |
| Zum Dividieren zweier Bruchterme muss der Kehrbruch des Divisors mit dem Dividenden multipliziert werden. | $\frac{2x}{x+1} : \frac{x-2}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x}{x-2}$ |
| **Negative Exponenten**<br><br>F(x)= $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$<br><br>Es gilt: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$<br>$x^n : x^m = x^{n-m}$<br><br>m und n sind beliebige ganze Zahlen. | $\frac{x^3 \cdot x^{-4}}{x^{-2}} = x^{3-4-(-2)} = x$ |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|
| **Bruchgleichungen**<br><br>Zum Auflösen von Bruchgleichungen muss mit dem Hauptnenner beider Brüche multipliziert werden.<br>Als Lösung kommen nur Inhalte der Definitionsmenge in Frage. | $\frac{2x-1}{1-3x}=\frac{x+1}{6x-2}$ D $_f$ = Q \ $\{\frac{1}{3}\}$<br>$\frac{2x-1}{1-3x}=\frac{x+1}{-2(-3x+1)}$ I · (-2)(-3x+1) HN<br>$\frac{-2(-3x+1)(2x-1)}{(-3x+1)}=\frac{(x+1)(-2)(-3x+1)}{-2(3x+1)}$<br>$-2(2x-1)=x+1$<br>$-4x+2=x+1$<br>$1=5x \Rightarrow x=\frac{1}{5}$ |
| **Themenbereich 7: Ähnlichkeit** | |
| **Zentrische Streckung**<br><br>Bei der zentrischen Streckung gibt es ein Streckungszentrum Z und einen Streckungsfaktor k > 0. Zu einem Punkt A(A ≠ Z) gibt es somit einen Punkt $A'$:<br><br>1. A\` liegt auf der von Z ausgehenden Halbgeraden durch A,<br>2. $\overline{ZA'}=k\cdot\overline{ZA}$<br><br>Für k>1 wird so wird die Strecke vergrößert, für 0<k<1 verkleinert sich die Strecke. |  |

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

## Strahlensatz

V-Figur

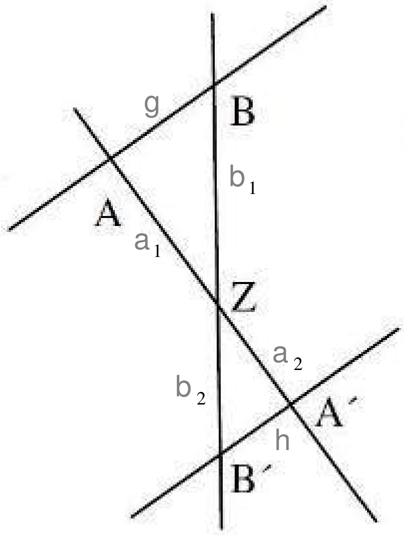



Man benötigt zwei sich schneidende Geraden a und b. Diese werden von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten.

Dann gilt:

- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$
- $\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}$

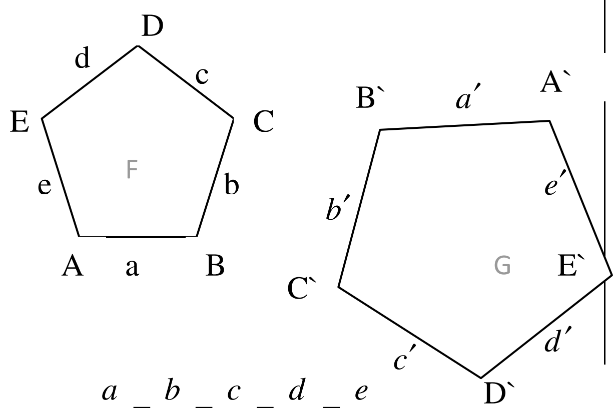
  bzw. $\frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_2}$
- $\frac{a_1}{g} = \frac{a_1 + a_2}{h}$ bzw. $\frac{b_1}{g} = \frac{b_1 + b_2}{h}$




## Eigenschaften ähnlicher Figuren

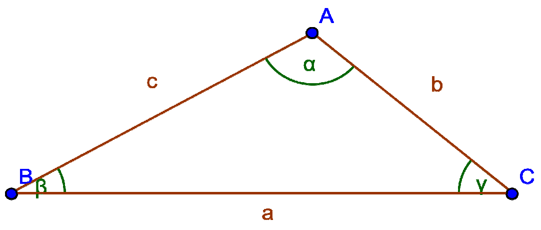
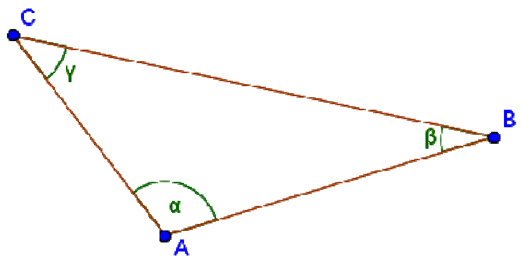
Für die Figuren F und G gilt:

- Gleiches Längenverhältnis bei entsprechenden Strecken
- Entsprechende Winkel sind gleich groß
- Der Flächeninhalt von G ist k $^2$ -mal so groß wie der von F, wenn die Seiten von G k-mal so lang sind wie die von F.




$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

| Wissen | Beispiel |
|---|---|

| | |
|---|---|
| **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**<br><br>Dreiecke sind ähnlich,<br>- Wenn zwei Winkel der beiden Dreiecke übereinstimmen<br>- Wenn das Seitenverhältnis übereinstimmt (S:S:S-Satz) | <br><br><br><br>$\alpha = \alpha'; \beta = \beta'; \gamma = \gamma'$ |

Übungsaufgaben:

http://www.abfrager.de/gymnasium/klasse8/mathematik.htm

http://www.mathe-physik-aufgaben.de/sch_gm_08_mathe.html